Geometria 3: 13 novembre 2019.

Esercizio 1. *Sia data la seguente famiglia di curve* $\alpha_k : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$

$$\alpha_k(t) := (t\cos(k), k\cos(t), kt)$$

dove $k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(1) *Verificare che le curve* α_k *sono regolari e determinarne la curvatura.* **(2 pt.)**

(2) *Dire per quali valori di* k *le curve* α_k *sono piane e, in tali casi, determinare l'equazione cartesiana del piano* π_k *che contiene la curva* α_k. **(2 pt.)**

(3) *Verificare che le curve* α_k *sono prive di autointersezioni e che sono a due a due disgiunte.* **(2 pt.)**

Esercizio 2. *Sia data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *così definita:*

$$f(x, y, z) = z^2(x^2 + y^2) - 1 - z^3$$

e si consideri il sottoinsieme $S := f^{-1}(0) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$.

(1) *Provare che* S *è una superficie regolare.* **(1 pt.)**

(2) *Posto* $z = t$, *determinare una parametrizzazione regolare di* S. **(2 pt.)**

(3) *Stabilire la natura dei punti di* S. **(3 pt.)**

Esercizio 3. (1) *Determinare la trasformazione lineare fratta* T *che manda* i *in* $\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$, 0 *in* i *e* $\frac{1}{3}$ *in* ∞. **(2 pt.)**;

(2) *Trovare i punti fissi di* T. **(1 pt.)**;

(3) *Determinare per quale* $\lambda \in \mathbb{R}$ *l'immagine di* $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \lambda\}$ *è una retta e determinare l'equazione cartesiana di tale retta.* **(3 pt.)**.

Esercizio 4. *Calcolare il valore dei seguenti integrali:*

(1) $\oint_{\gamma(-4i;2)} \frac{e^{2z}}{(z+3i)^3} dz$ **(1 pt.)**;

(2) $\oint_{\gamma(-1;\frac{1}{2})} z^2 \sin(\frac{1}{z+1}) dz$ **(1 pt.)**.

Determinare il numero di zeri del polinomio $p(z) = z^{100} + 180z^{25} + 12z^5 - 2z^3 - 3z + 20$ *nella regione anulare* $1 \le |z| \le 3$; **(2 pt.)**.

Determinare la serie di Laurent centrata nel punto $z = -3i$ *della funzione*

$$f(z) = \frac{-4}{z + 3i} - \frac{i}{z - 5i} \text{ (2pt.)}.$$

Esercizio 5. *Risolvere i seguenti esercizi:*

(1) *Verificare che* $T(z) := \frac{z-i}{z+i}$ *è una funzione olomorfa, biunivoca e con inversa olomorfa, tra il semipiano superiore* $\mathbb{H}$ *ed il disco unitario* $\mathbb{D}(0,1)$ **(3 pt.)**;

(2) *Dire per quale* $a \in \mathbb{C}$ *risulta che la funzione* $f(z) = az\overline{z} + \sin(2z) + i\cos(3z)$ *risulta essere olomorfa su* $\mathbb{C}$. **(3 pt.)**